

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN A

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Supoñendo que A e X son matrices cadradas e que $A + I$ é invertible, despeza X na ecuación $A - X = AX$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = AX$.

Solución:

$$1.a) A - X = AX \Leftrightarrow A = AX + X \Leftrightarrow A = (A + I)X \Leftrightarrow X = (A + I)^{-1}A.$$

1.b) Claramente, $A + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Posto que $\det(A + I) = 4 + 1 = 5$, tense

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e polo tanto

$$X = (A + I)^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alternativa para 1.b): Desenvólvese a idea seguinte: calcular α, β, γ e δ tales que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

2. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Mediante integración por partes, demostra que $\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$. Logo, demostra a mesma igualdade mediante derivación.

b) Se $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \in (0, e], \\ ax + b & \text{se } x \in (e, \infty), \end{cases}$ di que relación ten que existir entre os parámetros a e b para que f sexa continua e cales teñen que ser os seus valores para que f sexa derivable.

c) Calcula a área da rexión encerrada polo eixe X , a recta $x = 4$ e a gráfica de $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{se } x \in (0, e], \\ \frac{x}{e} & \text{se } x \in (e, \infty). \end{cases}$

Solución:

2.a) Empregando a fórmula de integración por partes con

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx,$$

$$dv = dx, \quad v = x,$$

$$\text{tense } \int \ln x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Por outra banda,

$$(x(\ln x - 1) + C)' = (x(\ln x - 1))' = \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x.$$

MATEMÁTICAS II

2.b) Estúdanse a continuidade e a derivabilidade no único punto conflitivo, que é $x = e$.

Continuidade:

$$f(e) = \ln e = 1, \quad \lim_{x \uparrow e} f(x) = \lim_{x \uparrow e} \ln x = \ln e = 1, \quad \lim_{x \downarrow e} f(x) = \lim_{x \downarrow e} (ax + b) = ae + b. \quad \text{En}$$

consecuencia, f é continua se, e soamente se, $ae + b = 1$.

Derivabilidade:

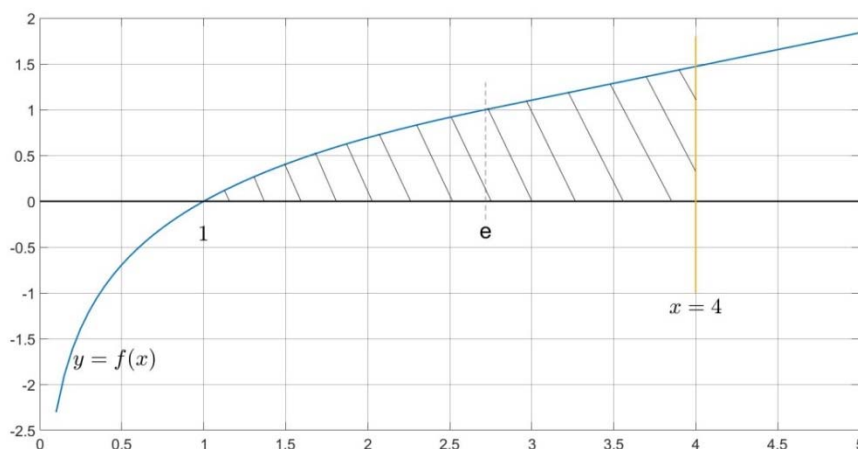
Nótese en primeiro lugar que, para que f sexa derivable, a condición $ae + b = 1$ tense que cumprir, xa que a continuidade é condición necesaria para a derivabilidade. Por outra

$$\text{banda, } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in (0, e), \\ a & \text{se } x \in (e, \infty), \end{cases} \quad \text{de onde } \lim_{x \uparrow e} f'(x) = \lim_{x \uparrow e} \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \quad \text{e} \quad \lim_{x \downarrow e} f'(x) = \lim_{x \downarrow e} a = a.$$

Conclúese que f é derivable se, e soamente se, $a = \frac{1}{e}$ e $b = 0$.

Alternativa para o estudo da derivabilidade: substitúase b por $1 - ae$ na expresión de f (xa que non pode ser derivable se non é continua) e empréguese a definición de derivada. É dicir, compróbase para que valor ou valores de a os límites $\lim_{x \uparrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e}$ e $\lim_{x \downarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e}$ existen e son iguais.

2.c)



De acordo coa figura, a área pedida é a seguinte (o adxectivo “encerrada” obríganos a considerar a rexión raiada):

$$\ln e = 1, \ln 1 = 0$$

$$A = \int_1^e \ln x \, dx + \int_e^4 \frac{x}{e} \, dx = [x(\ln x - 1)]_1^e + \left[\frac{x^2}{2e} \right]_e^4 = 1 + \frac{16}{2e} - \frac{e^2}{2e} = 1 + \frac{8}{e} - \frac{e}{2} = \frac{2e+16-e^2}{2e} u^2 \approx$$

$$2.5839 u^2,$$

onde u indica “unidade de lonxitude”.

3. Pídese:

a) Calcular o ángulo do intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que forman os vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e

$$\vec{v}\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

MATEMÁTICAS II

- b) Obter a ecuación implícita do plano que pasa polo punto $P(1, -3, 0)$ e é perpendicular á recta
- $$\begin{cases} x - y + 2z = 1, \\ y - z = 0. \end{cases}$$
- c) Calcular a distancia do punto $Q(1, 1, 1)$ ao plano $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ e o punto simétrico de Q respecto a π .

Solución:

3.a) Se \cdot denota produto escalar de vectores, $| \cdot |$ valor absoluto e $\| \cdot \|$ norma euclidiana, sábese que o ángulo pedido α está determinado pola ecuación $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$, no sentido de que é o único ángulo α do intervalo $[0^\circ, 90^\circ]$ que satisfai esa igualdade.

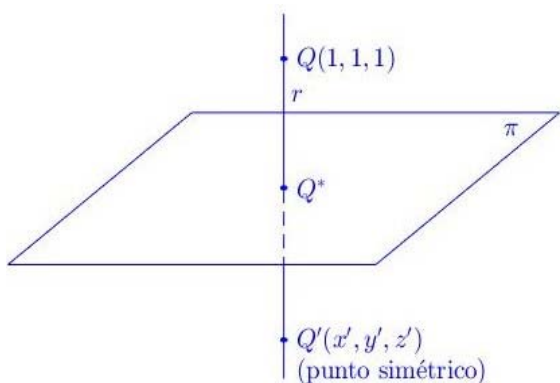
Dado que

- $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{(-1+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \right| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$ e
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1-2\sqrt{2}+2)}{4} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{(1-2\sqrt{2}+2)}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{1+1-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1,$

chégase a que $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, de onde $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$.

3.b) Chamemos π ao plano pedido e r á recta dada. Pódese obter un vector normal a π a partir de dous puntos de r : $R(1, 0, 0), S(0, 1, 1) \in r$, e en consecuencia $\vec{n}_\pi = \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ é normal a π . Alternativamente, pódese obter \vec{n}_π do produto vectorial $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Como π pasa por $P(1, -3, 0)$, a súa ecuación é $\pi: -(x-1) + (y+3) + z = 0$, e como $-(x-1) + (y+3) + z = -x + 1 + y + 3 + z = -x + y + z + 4$, conclúese que a ecuación implícita de π é $\pi: -x + y + z + 4 = 0$.

3.c) $d(Q, \pi) = \frac{|-1+1+1+4|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2.8868$. Pasemos á obtención do punto simétrico.



A recta r que pasa por $Q(1, 1, 1)$ e é perpendicular a $\pi: -x + y + z + 4 = 0$ vén dada por

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 1 + \lambda, \\ z = 1 + \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cálculo de $Q^* = r \cap \pi$:

$$\begin{aligned} -(1 - \lambda) + 1 + \lambda + 1 + \lambda + 4 &= -1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda + 4 \\ &= 3\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{5}{3}, \end{aligned}$$

de onde $Q^*(x, y, z)$ con $x = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$ e $y = z = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$, é dicir, $Q^*\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

MATEMÁTICAS II

Cálculo de $Q'(x', y', z')$, punto simétrico pedido:

$$\frac{1+x'}{2} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3+3x' = 16 \Leftrightarrow 3x' = 13 \Leftrightarrow x' = \frac{13}{3},$$

$$\frac{1+y'}{2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow 3+3y' = -4 \Leftrightarrow 3y' = -7 \Leftrightarrow y' = -\frac{7}{3},$$

$$z' = y'.$$

En definitiva, $Q'\left(\frac{13}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

- a) O 40% dos habitantes dunha certa comarca teñen camelias, o 35% teñen rosas e o 21% teñen camelias e rosas. Se se elixe ao azar a un habitante desa comarca, calcular as cinco probabilidades seguintes: de que teña camelias ou rosas; de que non teña nin camelias nin rosas; de que teña camelias, sabendo que ten rosas; de que teña rosas, sabendo que ten camelias; e de que soamente teña rosas ou soamente teña camelias.
- b) Se nun auditorio hai 50 persoas, cal é a probabilidade de que polo menos 2 teñan nacido no mes de xaneiro?

Solución:

4.a) Damos nomes aos sucesos: R = “ter rosas” e C = “ter camelias”.

Sabemos que $P(C) = 0.4$, $P(R) = 0.35$ e $P(C \cap R) = 0.21$. As probabilidades pedidas son, por orde, as seguintes:

- $P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R) = 0.4 + 0.35 - 0.21 = 0.54$.
- En virtude dunha das leis de De Morgan, $\bar{C} \cap \bar{R} = \overline{C \cup R}$. Consecuentemente, $P(\bar{C} \cap \bar{R}) = P(\overline{C \cup R}) = 1 - P(C \cup R) = 1 - 0.54 = 0.46$.
- $P(C|R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0.21}{0.35} = 0.6$.
- $P(R|C) = \frac{P(C \cap R)}{P(C)} = \frac{0.21}{0.4} = 0.525$.
- $P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})) = P(R \cap \bar{C}) + P(C \cap \bar{R})$, xa que os sucesos $R \cap \bar{C}$ e $C \cap \bar{R}$ son incompatibles. De $P(R) = P(R \cap C) + P(R \cap \bar{C})$ dedúcese que $P(R \cap \bar{C}) = 0.35 - 0.21 = 0.14$, e de $P(C) = P(C \cap R) + P(C \cap \bar{R})$ que $P(C \cap \bar{R}) = 0.4 - 0.21 = 0.19$. Por último, $P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})) = 0.14 + 0.19 = 0.33$.

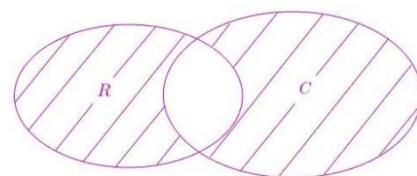
Alternativa para o cálculo de $P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R}))$ (ver debuxo):

$$P((R \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{R})) = P(R \cup C) - P(R \cap C) = 0.54 - 0.21 = 0.33.$$

4.b) X = “n.º de persoas nadas no mes de xaneiro, de entre as 50”.

$X \rightarrow B\left(50, \frac{1}{12}\right)$, é dicir, X segue unha distribución binomial de parámetros $n = 50$ e $p = \frac{1}{12} = 0.08\bar{3}$; logo $q = 1 - p = \frac{11}{12} = 0.91\bar{6}$. Pídese $P(X \geq 2)$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}.$$



MATEMÁTICAS II

Posto que $P(X = 0) = \binom{50}{0} p^0 q^{50} = \left(\frac{11}{12}\right)^{50} \approx 0.0129$ e $P(X = 1) = \binom{50}{1} p^1 q^{49} = 50 \frac{1}{12} \left(\frac{11}{12}\right)^{49} \approx 0.0586$, téñense sucesivamente $P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0.0129 + 0.0586 = 0.0715$ e $P(X \geq 2) \approx 1 - 0.0715 = 0.9285$.

Nota: se se toma $p = \frac{31}{365} \approx 0.0849$, obtense $P(X \geq 2) \approx 0.9333$.

MATEMÁTICAS II

OPCIÓN B

1. Dá resposta aos apartados seguintes:

a) Discute, segundo os valores do parámetro m , o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ 0 \quad my + (3-m)z = -6, \\ 2x - y + mz = 6. \end{cases}$$

b) Resólveo, se é posible, nos casos $m = 0$ e $m = 4$.

Solución:

1.a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 0 & 0 & m-3 & 6 \end{array} \right), \text{ polo que o sistema dado}$$

equivale ao que escribimos a continuación, que ten a vantaxe de ser triangular:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ my + (3-m)z = -6, \\ (m-3)z = 6. \end{cases}$$

De ser compatible, este sistema pode ser resolto de abaixo arriba, empezando polo cálculo de z , seguindo co de y e terminando co de x . Sempre que $m \neq 3$, téñense que $z = \frac{6}{m-3}$ e que a segunda ecuación queda reducida á igualdade $my = 0$, de onde se infire á súa vez que $y = 0$ cando, ademais de ser $m \neq 3$, é $m \neq 0$. Resulta agora clara a discusión que segue:

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución).
A solución é a seguinte: $z = \frac{6}{m-3}$, $y = 0$, $x = -\frac{3z}{2}$.
- Caso $m = 3$: o sistema é incompatible (non ten solución), porque a terceira ecuación do sistema triangular queda $0 = 6$.
- Caso $m = 0$: o sistema triangular é

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ 3z = -6, \\ -3z = 6, \end{cases}$$

de onde $z = -2$, $y = \lambda \in \mathbb{R}$, e $x = \frac{\lambda+6}{2}$. É dicir, o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).

Alternativa para 1.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$, respectivamente,

a matriz do sistema e a matriz ampliada. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & m \end{vmatrix} = 2m$ e $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & m \end{vmatrix} = -m+3$ non se anulan á vez, $2 \leq \text{rank } A \leq \text{rank } A^* \leq 3$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 2(3-m) - 6m + 2(3-m) = 2m^2 - 6m = 2m(m-3),$$

e polo tanto $\det A = 0$ se, e só se, $m \in \{0,3\}$. Consecuentemente, a discusión é a seguinte:

MATEMÁTICAS II

- Caso $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,3\}$: o sistema é compatible determinado (ten unha única solución), xa que $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 3 = n.$ de incógnitas.
- Caso $m = 0$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0$, tense $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2 < n.$ de incógnitas, e polo tanto o sistema é compatible indeterminado (ten infinitas solucións).
- Caso $m = 3$: $\text{rank } A = 2$ e $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 36 + 12 - 12 = 36 \neq 0$, tense $\text{rank } A = 2 < \text{rank } A^* = 3$, e polo tanto o sistema é incompatible (non ten solución).

1.b) Se $m = 0$, as infinitas solucións son $\begin{cases} x = \frac{\lambda+6}{2}, \\ y = \lambda, \\ z = -2, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$ (Ver apartado 1.a.)

Se $m = 4$, a solución é $z = \frac{6}{m-3} = 6$, $y = 0$ e $x = -\frac{3z}{2} = -\frac{18}{2} = -9$. (Ver apartado 1.a.)

Nota: se se opta pola solución que arriba chamamos alternativa para responder ao apartado 1.a), a solución do apartado 1.b) pasa por escribir o sistema orixinal nos casos particulares $m = 0$ e $m = 4$ e resolver cada un deles mediante un método calquera.

2. Considérese a función $f(x) = x^2 e^{-x}$. Pídese:

- Calcular os límites $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Determinar intervalos de crecemento e de decrecemento, extremos relativos e puntos de inflexión.
- Calcular $\int f(x) dx$.

Solución:

2.a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Falando con rigor, a regra de L'Hôpital dinos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existe e vale 0 porque $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x}$ existe e vale 0.

No segundo límite non hai indeterminación: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \infty \cdot \infty = \infty$.

2.b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. A derivada $f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$ ten o signo de $x(2-x)$, xa que e^{-x} é sempre positivo. Logo f decrece estritamente en $(-\infty, 0)$, crece estritamente en $(0, 2)$ e decrece estritamente en $(2, \infty)$.

Ao ser f continua, ten un mínimo relativo estricto en $x = 0$ e un máximo relativo estricto en $x = 2$. Non ten outros extremos.

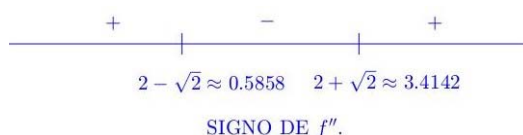


MATEMÁTICAS II

Pasamos agora ao estudo das posibles inflexións. $f'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$, de onde $f''(x) = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (2 - 2x - 2x + x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. Polo tanto, f'' ten o signo de $x^2 - 4x + 2$, cuxas raíces son

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Agora podemos marcar no debuxo seguinte o signo de f'' :



(Se houbera dúbidas, bastaría comprobar o signo de f'' nun punto calquera de cada un dos tres intervalos de interese.)

Esta análise dinos que f é convexa en $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$, cóncava en $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ e de novo convexa en $(2 + \sqrt{2}, \infty)$. A función f presenta polo tanto dous puntos de inflexión: en $x = 2 - \sqrt{2}$ e en $x = 2 + \sqrt{2}$.

2.c) Empregando a fórmula de integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= x^2, & du &= 2x dx, \\ dv &= e^{-x} dx, & v &= -e^{-x}, \end{aligned}$$

tense

$$\int f(x) dx = \int x^2 e^{-x} dx = \int u dv = uv - \int v du = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx.$$

Usando de novo o método de integración por partes, esta vez con

$$\begin{aligned} u &= x, & du &= dx, \\ dv &= e^{-x} dx, & v &= -e^{-x}, \end{aligned}$$

chégase a que $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx$.

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \left\{ -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right\} = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= (-x^2 - 2x - 2)e^{-x} + C = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C. \end{aligned}$$

3. Dá resposta aos apartados seguintes:

- Estuda a posición relativa dos planos $\pi_1: mx - y + 2 = 0$ e $\pi_2: 2x + 3y = 0$ en función do parámetro m .
- Obtén a ecuación implícita do plano que pasa polos puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ e $C(0,1,0)$.
- Calcula o punto simétrico do punto $P(1,2,3)$ con respecto ao plano $\pi: -x + z = 0$.

Solución:

- Os planos nunca coinciden, xa que $O(0,0,0) \in \pi_2 \setminus \pi_1$ para calquera valor de m . Agora, como $\vec{n}_{\pi_1}(m, -1, 0)$ e $\vec{n}_{\pi_2}(2, 3, 0)$ son normais, respectivamente, a π_1 e a π_2 ,

MATEMÁTICAS II

$$\pi_1 \text{ e } \pi_2 \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \vec{n}_{\pi_1} \text{ e } \vec{n}_{\pi_2} \text{ son paralelos} \Leftrightarrow \frac{m}{2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3},$$

o que á súa vez implica que se cortan nunha recta cando $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

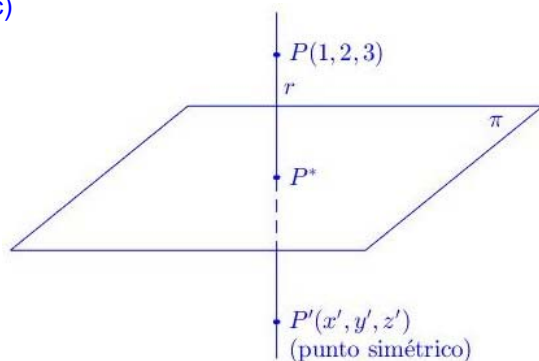
Alternativa para 3.a): Sexan $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^* = \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$. Posto que $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, tense que $\text{rank } A^* = 2$ para calquera valor de m . Por outra banda, $\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$. Segundo esta análise:

- Se $m = -\frac{2}{3}$, $\text{rank } A = 1 < \text{rank } A^* = 2$, polo que os planos son paralelos non coincidentes.
- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$, $\text{rank } A = \text{rank } A^* = 2$, polo que os planos se cortan nunha recta.

3.b) Os vectores $\vec{AB}(1,0,1)$ e $\vec{AC}(0,1,0)$ son xeradores do plano pedido, ao que chamaremos π .

Ademais, $A(0,0,0) \in \pi$, polo que $\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Como $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = z - x$, a ecuación implícita do plano é $\pi: -x + z = 0$.

3.c)



A recta que pasa por $P(1,2,3)$ e é perpendicular a $\pi: -x + z = 0$ é

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = 2, \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cálculo de $P^* = r \cap \pi$:

$$-(1 - \lambda) + 3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1,$$

de onde $P^*(x, y, z)$ con $x = 1 - (-1) = 2$, $y = 2$ e $z = 3 + (-1) = 2$, é dicir, $P^*(2,2,2)$.

Cálculo de $P'(x', y', z')$, punto simétrico pedido:

$$\frac{1 + x'}{2} = 2 \Leftrightarrow 1 + x' = 4 \Leftrightarrow x' = 3,$$

$$\frac{2 + y'}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 + y' = 4 \Leftrightarrow y' = 2,$$

$$\frac{3 + z'}{2} = 2 \Leftrightarrow 3 + z' = 4 \Leftrightarrow z' = 1.$$

En definitiva, $P'(3,2,1)$.

4. Dá resposta aos apartados seguintes:

- Sexan A e B dous sucesos dun mesmo espazo mostral. Calcula $P(A)$ se $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A \cup B)$ é o triplo de $P(A)$.
- Nun determinado lugar, a temperatura máxima durante o mes de xullo segue unha distribución normal de media 25°C e desviación típica 4°C . Calcula a probabilidade de que a

MATEMÁTICAS II

temperatura máxima dun certo día estea comprendida entre 21°C e 27.2°C. En cantos días do mes se espera que a temperatura máxima permaneza dentro dese rango?

Solución:

4.a) Temos $3P(A) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, de onde en primeira instancia se obtén $2P(A) = P(B) - P(A \cap B) = 0.8 - 0.2 = 0.6$ e, en segunda, $P(A) = 0.3$.

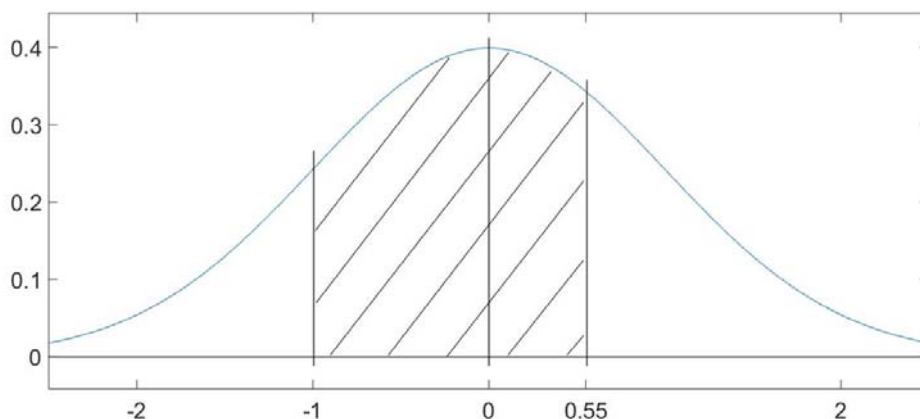
4.b) X = "temperatura máxima dun día do mes de xullo".

$$X \rightarrow N(25,4) \Rightarrow Z = \frac{X - 25}{4} \rightarrow N(0,1).$$

Logo

$$\begin{aligned} P(21 \leq X \leq 27.2) &= P\left(\frac{21 - 25}{4} \leq Z \leq \frac{27.2 - 25}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0.55) \\ &= P(Z \leq 0.55) - P(Z < -1) = P(Z \leq 0.55) - P(Z > 1) \\ &= P(Z \leq 0.55) - \{1 - P(Z \leq 1)\} \approx 0.7088 - 1 + 0.8413 = 0.5501 \end{aligned}$$

é a probabilidade pedida. Espérase polo tanto que en $0.5501 \times 31 \approx 17$ días do mes a temperatura máxima estea comprendida entre 21°C e 27.2°C.



A área da zona raiada é igual á probabilidade pedida $P(-1 \leq Z \leq 0.55)$.